2 Formalismo matemático

- Productor escalar hermítico: $\langle\chi|\varphi\rangle$
  - Linealidad: $\langle\chi|\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2\rangle = \lambda_1\langle\chi|\varphi_1\rangle + \lambda_2\langle\chi|\varphi_2\rangle$
  - Hermiticidad: $\langle\chi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\chi\rangle^*$
  - Definido positivo: $\langle\varphi|\varphi\rangle \geq 0$
- Antilinealidad: $\langle\lambda_1\chi_1+\lambda_2\chi_2|\varphi\rangle = \lambda_1^*\langle\chi_1|\varphi\rangle + \lambda_2^*\langle\chi_2|\varphi\rangle$
- Norma: $\|\varphi\| = \sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle}$
- Desigualdad de Schwarz: $|\langle\chi|\varphi\rangle|^2 \leq \langle\chi|\chi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle = \|\chi\|^2\|\varphi\|^2$ cuando $|\chi\rangle = \alpha|\varphi\rangle$ para $\alpha\in\mathbb{C}$.
- Base ortonormal: $\{|n\rangle\} = \{|1\rangle, |2\rangle, \ldots, |N\rangle\}$ con $N = \dim\mathcal{H}$, y

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}, \quad |\varphi\rangle = \sum_{n=1}^{N} c_n|n\rangle, \quad c_m = \langle m|\varphi\rangle.$$

- Producto escalar en componentes: $\langle\chi|\varphi\rangle = \sum_{n=1}^{N} a_n^* c_n$
- Conjugación hermítica: $(|\chi\rangle)^\dagger = \langle\chi|$
- Vector "ket": $|\varphi\rangle = \sum_{n=1}^{N} c_n|n\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$
- Vector dual "bra": $\langle\chi| = \sum_n a_n^*\langle n| = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)$
- Producto escalar:

$$\langle\chi|\varphi\rangle = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = a_1^*c_1 + a_2^*c_2 + \cdots + a_N^*c_N$$

- Vector imagen (operador A): $|A\varphi\rangle = \sum_n c_n|An\rangle = \sum_m d_m|m\rangle$
- Elementos de matriz del operador A: $A_{ln} \equiv \langle l|An\rangle$ y $d_l = \sum_{n=1}^{N} A_{ln}c_n$.
- Producto externo/operador: $P_{\chi\varphi}(|\alpha\rangle) = |\chi\rangle\langle\varphi|\alpha\rangle$

$$P_{\varphi_1\varphi_2} = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}(b_1^*, b_2^*, \ldots, b_N^*) = \begin{pmatrix} a_1b_1^* & \cdots & a_1b_N^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_Nb_1^* & \cdots & a_Nb_N^* \end{pmatrix}$$

  i.e. $(P_{\varphi_1\varphi_2})_{ln} = a_l b_n^*$.
- Operador lineal A: $A = \sum_{m,n=1}^{N} A_{mn}|m\rangle\langle n|$
- Fórmula resolución de la unidad: $I = \sum_{n=1}^{N}|n\rangle\langle n|$
- Producto de matrices:

$$AB = \sum_{p,m}(AB)_{pm}|p\rangle\langle m|, \quad (AB)_{pm} = \sum_n A_{pn}B_{nm}.$$

- Conjugación hermítica: $\langle\chi|A^\dagger\varphi\rangle = \langle A\chi|\varphi\rangle = \langle\varphi|A\chi\rangle^*$
  - Representación matricial: $(A^\dagger)_{mn} = A^*_{nm}$
  - $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$
  - $(A^\dagger)^\dagger = A$
  - Hermítico/autoadjunto: $A^\dagger = A$
  - Antihermítico: $A^\dagger = -A$
  - Unitario: $U^{-1} = U^\dagger$ o $U\cdot U^\dagger = I$ y verifican $\|U\varphi\| = \|\varphi\|$.
- Complemento ortogonal: $M^\perp = \{|\psi\rangle\in\mathcal{H}/\ \langle\phi|\psi\rangle = 0, \forall\,|\phi\rangle\in M\}$
- Proyector: $\mathcal{P}_M = \sum_{n=1}^{D}|n\rangle\langle n|$ donde $D\leq\dim\mathcal{H} = N$.
  - $\mathcal{P}_M^\dagger = \mathcal{P}_M$
  - $\mathcal{P}_M^2 = \mathcal{P}_M$
  - $|\phi\rangle\in M \Rightarrow \mathcal{P}_M|\phi\rangle = |\phi\rangle, \quad |\chi\rangle\in M^\perp \Rightarrow \mathcal{P}_M|\chi\rangle = 0.$
  - Proyector en la dirección de $|\varphi\rangle$: $\mathcal{P}_\varphi = \dfrac{|\varphi\rangle\langle\varphi|}{\|\varphi\|^2}$
- Traza de un operador A: Tr $A = \sum_{n=1}^{N}\langle n|A|n\rangle = \sum_{n=1}^{N} A_{nm}$
  - Tr (AB) = Tr (BA)
  - Tr (ABC) = Tr (BCA) = Tr (CAB)
- Conmutador: $[A,B] = AB - BA$
  - $[A,BC] = [A,B]\,C + B\,[A,C]$
    $[AB,C] = A\,[B,C] + [A,C]\,B$
  - Identidad de Jacobi: $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]] = 0$
- Autovalores y autovectores: $A|\varphi\rangle = a|\varphi\rangle$, siendo $|\varphi\rangle$ el autovector y a el autovalor .
- **Teorema**: los autovalores de un operador hermítico son reales y los autovectores correspondientes a dos autovalores distintos son ortogonales.
- Representación espectral del operador: $A = \sum_n a_n\mathcal{P}_n$, A debe ser diagonalizable.
- Operadores compatibles: $[A,B] = 0$ son simultáneamente diagonalizables, siendo A, B operadores lineales hermíticos.
- Operador normal: $AA^\dagger = A^\dagger A \Leftrightarrow [A, A^\dagger] = 0$
- Funciones de operadores:

$$f(A) = X\left[\sum_{p=0}^{\infty} c_p D^p\right]X^{-1} = \sum_n f(d_n)\mathcal{P}_n$$

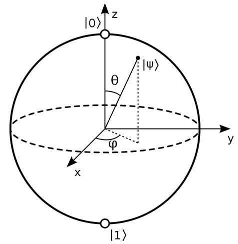
- Matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  - $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son hermíticas.
  - $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I$
  - $\sigma_i\sigma_j = \delta_{i,j}I + i\sum_k\epsilon_{ijk}\sigma_k$
  - Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$,

$$(\sigma\cdot\mathbf{a})(\sigma\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\sigma\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

  - $[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\sum_k\epsilon_{ijk}\sigma_k$
  - $\sigma_i|\pm i\rangle = \pm|\pm i\rangle$, para $i = x, y, z$
  - $(\mathbf{v}\cdot\sigma)^n = \begin{cases} I, & n \text{ par}, \\ \mathbf{v}\cdot\sigma & n \text{ impar}. \end{cases}$
  - $e^{i\theta\mathbf{v}\cdot\sigma} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta(\mathbf{v}\cdot\sigma), \quad \mathbf{v}^2 = 1$
- Autovectores matrices de Pauli:



$$|+z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$|-z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+z\rangle + |-z\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$|-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+z\rangle - |-z\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$|+y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+z\rangle + i|-z\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$
$$|-y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|+z\rangle + |-z\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Grupo de Lie SU(N): matrices $N\times N$ tales que $M^\dagger = M^{-1}$ y det $M = 1$

$$\exp[\text{ álgebra de Lie }] = \text{ grupo de Lie}$$

- Fórmula de Glauber: $e^Ae^B = e^{A+B}e^{[A,B]/2}$, solo si $[A,B]$ no es un operador.

3 Postulados de la Mecánica Cuántica

- **Postulado 1**. Los estados de un sistema están representador por un vector de estado $|\psi\rangle\in\mathcal{H}$
- **Postulado 2**. Las propiedades físicas (observables) están representadas por operadores lineales hermíticos.
- **Postulado 3**. Al medir un operador A el resultado siempre es uno de sus autovalores

$$p(a_n) = |\langle a_n|\psi\rangle|^2 = |c_n|^2 = \langle\psi|\mathcal{P}_{a_n}|\psi\rangle$$

- **Postulado 4**. El vector de estado evoluciona con el tiempo según

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}|\psi(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = H(t)|\psi(t)\rangle$$

- Probabilidad de transición $|\psi\rangle\to|\chi\rangle$:

$$P(\psi\to\chi) = |\langle\chi|\psi\rangle|^2$$

- Amplitud de probabilidad: $a(\psi\to\chi) = \langle\chi|\psi\rangle$
- Colapso de la función de onda:

$$|\psi\rangle \to \frac{\mathcal{P}_{a_n}|\psi\rangle}{\langle\psi|\mathcal{P}_{a_n}|\psi\rangle^{1/2}}$$

- Valor medio: $\langle A\rangle_\psi = \langle\psi|A|\psi\rangle$
- Principio de correspondencia: $\hbar\to 0$
- Operador unitario $U(t,t_0)$:

$$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H}|\psi(t_0)\rangle$$

- Ecuación diferencial operador unitario:
$$i\hbar\frac{\mathrm{d}U(t,t_0)}{\mathrm{d}t}=H(t)U(t,t_0)$$
  - $U(t_0,t_0)=1$
  - Propiedad de grupo: $U(t_2,t_1)U(t_1,t_0)=U(t_2,t_0)$
  - Condición de unitariedad: $U^\dagger(t,t_0)=U^{-1}(t,t_0)=U(t_0,t)$
- Estados estacionarios: autoestados del hamiltoniano, $|E_n\rangle$
- Teorema de Ehrenfest:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle_\psi=\left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle_\psi-\frac{i}{h}\langle[A,H]\rangle_\psi$$
- Regla de cuantización: $\{A,H\}_P\to-\frac{i}{\hbar}[A,H]$
- Teorema de conservación de la energía: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle H\rangle_\psi=\left\langle\frac{\partial H}{\partial t}\right\rangle_\psi$
$$\frac{\partial A}{\partial t}=0,\quad\langle[A,H]\rangle_\psi=0\implies\langle A\rangle_\psi\equiv\text{cte}$$
- Incertidumbre de A en $|\psi\rangle$:
$$(\Delta_\psi A)^2=\left\langle(A-\langle A\rangle_\psi^2)\right\rangle_\psi=\left\langle A^2\right\rangle_\psi-\langle A\rangle_\psi^2$$
  la cantidad $\Delta_\psi A$ es la dispersión.
- Desigualdad de Heisenberg: $\Delta_\psi A\Delta_\psi B\geq\frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle_\psi\right|$
- Vida media de $|\psi\rangle$:
$$\tau_\psi(A)\equiv\frac{\Delta_\psi A}{\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle_\psi\right|}$$
- Relación incertidumbre tiempo-energía: $\Delta E\Delta t\geq\hbar/2$
- Operador en imagen de Heisenberg: $A_H(t)=U(t_0,t)AU(t,t_0)$
- Variación de $A_H(t)$: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_H=\frac{i}{\hbar}[H_H(t),A_H(t)]+\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_H$
- Razón giromagnética: $\gamma=g\frac{q}{2mc}$
- Partículas con espín 1/2:
  - Hamiltoniano: $H=-\mu\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}$
  - Operador de espín: $\mathbf{S}=\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$
  - Momento magnético: $\boldsymbol{\mu}=\frac{\gamma\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}=\frac{gq\hbar}{4mc}\boldsymbol{\sigma}$
  - Autovalores: $|\boldsymbol{\mu}|=\frac{g|q|\hbar}{4mc}$
  - Magnetón de Bohr: $\mu_B=\frac{e\hbar}{2m_ec}$
  - Momento magnético del electrón: $\boldsymbol{\mu}_e=-\frac{e\hbar}{2m_ec}\boldsymbol{\sigma}=\frac{g}{2}\mu_B\boldsymbol{\sigma}$
- Frecuencia de Larmor: $\omega=-\gamma B=-g\frac{qB}{2mc}$
- Evolución estado:
$$|\chi(t)\rangle=\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i}{2}(\phi+\omega t)}|+\rangle+\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}e^{\frac{i}{2}(\phi+\omega t)}|-\rangle$$

4 Entrelazamiento cuántico

- Producto tensorial: $(|n\rangle,|m\rangle)=|n,m\rangle=|n\otimes m\rangle$
  - Subsistemas independientes: $|\varphi\otimes\chi\rangle=\sum_{m,n}c_nd_m|n\otimes m\rangle$
  - Subsistemas no independientes: $|\phi\rangle=\sum_{n,m}b_{nm}|n\otimes m\rangle$
- Producto tensorial de dos operadores: $A\otimes B|\varphi\otimes\chi\rangle=|A\varphi\otimes B\chi\rangle$
- Producto tensorial de dos operadores sobre un estado:
$$A\otimes B|\phi\rangle=\sum_{n,m}b_{nm}|An\otimes Bm\rangle$$
- **Postulado 5**. Espacio de estados de dos sistemas en interacción es $\mathcal{H}_1^N\otimes\mathcal{H}_2^M$,
$$|\phi\rangle=\sum_{n,m}b_{n,m}|n\otimes m\rangle$$
- **Estado entrelazado**: no puede ser escrito en forma de un producto tensorial.
- **Estado puro**: puede ser descrito mediante un vector en el espacio de Hilbert, tenemos información completa sobre el sistema.
- **Estado mixto**: el sistema se describe mediante la matriz densidad, la información sobre el sistema es incompleta.
- **Superposición incoherente**: suma de estados.
- **Superposición coherente**: un estado se expresa como combinación lineal de los vectores de una base, la suma no depende de las fases relativas de los estados.
- Condición de no-entrelazamiento: $C_{++}C_{--}=C_{+-}C_{-+}$
- Operador densidad: $\rho=\sum_n p_n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|=\sum_n p_n\mathcal{P}_{\psi_n}$
  - Hermítico: $\rho^\dagger=\rho$
  - Traza uno: $\mathrm{Tr}\ \rho=1$
  - Autovalores positivos, $\det\rho\geq0$
  - Puro si y solo si $\rho^2=\rho$
  - $\mathrm{Tr}\ \rho^2\leq1$
- Pureza del estado:
  - Puro: $\mathrm{Tr}\ \rho^2=1,\quad\rho=\mathcal{P}_\varphi=|n\rangle\langle n|$
  - Completamente mezclado: $\mathrm{Tr}\ \rho^2=1/N,\quad\rho=\frac{1}{N}\sum_n|n\rangle\langle n|$
- Para un observable A con autovalores a_i:
  - $\langle A\rangle=\mathrm{Tr}\ (\rho A)$
  - $P(a_i)=\langle a_i|\rho|a_i\rangle$
- Matriz densidad de dos niveles: $\rho=\frac{1}{2}(1+\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma})$
- Puntos en la bola de Bloch ($|\mathbf{b}|^2\leq1$):
  - $\mathbf{b}^2=1$: pertenece a la esfera de Bloch, estado completamente polarizado.
  - $\mathbf{b}^2=0$: centro de la bola de Bloch, estado despolarizado.
  - $0<\mathbf{b}^2<1$: punto del interior de la bola de Bloch, estado parcialmente polarizado.
- Partículas de espín 1/2:
  - $\langle\mathbf{S}\rangle=\frac{\hbar\mathbf{b}}{2}$
  - $\rho(\mathbf{n})=\frac{1+\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}$
- Matriz densidad reducida: $\rho^{(1)}=\mathrm{Tr}_2\rho$
- Entropía estadística: $S_{vN}=-\mathrm{Tr}\ [\rho\ln\rho]=-\sum_n p_n\ln(p_n)$
  - Estado puro: $S_{vN}|_{\text{estado puro}}=0$
  - Estado despolarizado: $S_{vN}|_{\text{estado despolarizado}}=\ln N$
- Entropía termodinámica: $S=-k\mathrm{Tr}\ [\rho_T\ln\rho_T]=E/T+k\ln Z$
- Colectividad canónica: $p_n=\frac{1}{Z}e^{-\frac{E_n}{kT}}$
- Función de partición: $Z=\sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}}$
- Matriz densidad sistema en equilibrio termodinámico a temperatura T:
$$\rho_T=\frac{e^{-H/kT}}{\mathrm{Tr}\left[e^{-H/kT}\right]}$$
- Energía libre de Helmholtz: $F=-kT\ln Z$
  - $e^{-F/kT}=\mathrm{Tr}\left(e^{-H/kT}\right)$
- **Estado de Bell**: cuatro estados cuánticos de dos partículas con entrelazamiento máximo. No todos los estados entrelazados son de Bell.
- Base de Bell:
$$\left|\psi^\pm\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle\pm|1,0\rangle),\quad\left|\phi^\pm\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle\pm|1,1\rangle)$$
- Transformación inversa estados de Bell:
$$|0,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\phi^+\right\rangle+\left|\phi^-\right\rangle\right),\quad|1,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\phi^+\right\rangle-\left|\phi^-\right\rangle\right),$$
$$|0,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\psi^+\right\rangle+\left|\psi^-\right\rangle\right),\quad|1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\psi^+\right\rangle-\left|\psi^-\right\rangle\right)$$
- $\sigma_x|\pm\rangle=|\mp\rangle$, $\sigma_y|\pm\rangle=\pm i|\mp\rangle$, $\sigma_z|\pm\rangle=\pm|\pm\rangle$

5 Mecánica ondulatoria

- Función-δ de Dirac: $\langle x|x'\rangle=\delta(x-x')$
  - $\delta(x)=\delta(-x)$
  - $\delta(ax)=|a|^{-1}\delta(x)$
  - $\delta(x)=1/(2\pi)\int\mathrm{d}k\,e^{ikx}$
- Espacio de posiciones:
  - Función de onda: $\psi(x)=\langle x|\psi\rangle$
  - Condición de normalización: $\int\mathrm{d}x\,|\psi(x)|^2=1$
  - Operador X: $X\psi(x)=x\psi(x)$
  - Operador momento:
$$P=-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\implies P\psi(x)=-i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$$
  - Valor esperado:
$$\langle X\rangle_\psi=\langle\psi|X|\psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\psi^*(x)x\psi(x),$$
- Espacio de momentos:
  - Función de onda: $\widetilde{\psi}(p)=\langle p|\psi\rangle$
  - Condición de normalización: $\int\mathrm{d}p\,|\widetilde{\psi}(p)|^2=1$
  - Operador X:
$$X\widetilde{\psi}(p)=i\hbar\frac{\partial\widetilde{\psi}(p)}{\partial p}$$
  - Operador P: $P\widetilde{\psi}(p)=p\widetilde{\psi}(p)$

- Valor esperado:

$$\langle P \rangle_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\, p |\widetilde{\psi}(p)|^2$$

- Autofunciones del operador momento: $\psi_p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}px}$

- Relación canónica de conmutación: $[X, P] = i\hbar$
- Operador de traslaciones finitas: $T(a) = \exp\left[-\dfrac{ia}{\hbar}P\right]$
  - Unitario: $T^\dagger(a) = T^{-1}(a)$
  - Traslaciones infinitesimales: $T(\delta a) = 1 - \frac{i}{\hbar}P\delta a$
  - $T^\dagger(a) X T(a) = X + a$
  - $T^\dagger(a) P T(a) = P$
- Transformada de Fourier:

$$\widetilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-\frac{i}{\hbar}px} \psi(x)$$

- Transformada de Fourier inversa:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\, e^{\frac{i}{\hbar}px} \widetilde{\psi}(p)$$

- Relación de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, |\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \left|\widetilde{\psi}(p)\right|^2$$

- Desigualdad de Heisenberg: $\Delta X \Delta P \geq \hbar/2$
- Evolución temporal de una partícula libre:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\, e^{\frac{i}{\hbar}px - \frac{i}{\hbar}E(p)t} \widetilde{\psi}(p)$$

  - Vector de onda: $k = p/\hbar$
  - Frecuencia angular: $\omega = E/\hbar = \hbar k^2/2m$
  - Onda plana de De Broglie: $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i(kx - \omega t)}$
  - Longitud de onda de De Broglie: $\lambda = 2\pi/k = 2\pi\hbar/p$
  - Velocidad de fase: $v_f = \omega/k$
- Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t)$$

- Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\mathrm{d}^2 \psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\psi(x) = H\psi(x) = E\psi(x)$$

- Operador hamiltoniano: $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$
- Estado estacionario: $\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(x)$
- Fórmula Baker-Campbell-Hausdorff:

$$UPU^\dagger = e^{i\theta H} P e^{-i\theta H} = P + i\theta[H, P] + \frac{(i\theta)^2}{2!}[H, [H, P]] + \ldots$$

- Otros:
  - Resolución de la unidad: $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \int \mathrm{d}p \langle x|p\rangle \langle p|\psi\rangle$
  - Función Gamma: $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$

6 Sistemas cuánticos simples

- Oscilador armónico unidimensional:
  - Hamiltoniano: $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$
  - Operadores escalera (aniquilación a, creación $a^\dagger$):

$$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} P, \qquad a^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} P$$

    * $\left[a, a^\dagger\right] = 1$
    * $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$
    * $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
    * $a|0\rangle = 0$
  - Operador número: $N \equiv a^\dagger a$
    * $[N, a] = -a$
    * $\left[N, a^\dagger\right] = a^\dagger$
    * $N|n\rangle = n|n\rangle, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$
  - Energía del punto cero: $|n = 0\rangle = |0\rangle, \qquad E_0 = \hbar\omega/2$
  - Autoestado n-ésimo de la energía: $|n\rangle = \dfrac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$
  - Función de onda $\psi_0(x)$ del estado fundamental:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

  - Función de onda del n-ésimo estado del oscilador:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$$

- Partícula cargada en un campo electromagnético:
  - Campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en función de $\phi(\mathbf{r},t)$ y $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\nabla\phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t)$$

  - Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 - q\left[\phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right]$$

  - Ecuación del movimiento: $m\ddot{x}_i = qE_i + \frac{q}{c}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{B}\right)_i$
  - Hamiltoniano: $H = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 + q\phi(\mathbf{r},t)$
  - Ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 + q\phi(\mathbf{r},t)\right]\psi(\mathbf{r},t)$$

  - Acoplamiento mínimo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}q\phi, \qquad \nabla \to \nabla - \frac{i}{\hbar c}q\mathbf{A}$$

  - Derivadas covariantes gauge:

$$D_t \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}q\phi, \qquad D_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{i}{\hbar c}qA_i$$

- Otros:
  - Polinomios de Hermite $H_n(y)$:

$$e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y) = \left(y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)^n e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}$$

  - $e^{a^\dagger} = \sum_{n=0}^{\infty}(a^\dagger)^n/n!$

7 Momento angular

- Generadores infinitesimales de las rotaciones: $\mathbf{T} = (T_1, T_2, T_3)$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  - Conmutador: $[T_i, T_j] = i\sum_k \epsilon_{ijk} T_k$
  - Elementos de matriz: $(T_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}$
  - Hermiticidad: $T_i^\dagger = T_i$
- Matriz de rotación: $R_{\mathbf{n}}(\theta) = \left[1 - i\frac{\theta}{N}\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}\right]^N \approx e^{-i\theta\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}}$
  - Unitariedad: $[R_{\mathbf{n}}(\theta)]^\dagger = e^{i\theta\mathbf{T}^\dagger\cdot\mathbf{n}} = e^{i\theta\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}} = [R_{\mathbf{n}}(\theta)]^{-1}$
  - Matriz de rotación infinitesimal: $R_{\mathbf{n}}(\theta) = 1 - i\theta\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}$
  - Para $R_z(\theta)$:
    * $(T_3)^{2p} = (T_3)^2, \quad p \geq 1$
    * $(T_3)^{2p+1} = T_3, \quad p \geq 0$
    * $e^{-i\theta T_3} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Operador de rotación: $U_{\mathbf{n}}(\theta) = \exp\left[-\dfrac{i}{\hbar}\theta\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\right]$
  - Unitariedad: $U_{\mathbf{n}}(\theta)^\dagger = U_{\mathbf{n}}(\theta)^{-1}$
  - Generadores hermíticos: $J_i^\dagger = J_i$
  - Conmutador: $[J_i, J_j] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk} J_k$
  - Sea $\mathcal{S}$ un operador invariante bajo rotaciones; $[\mathbf{J}, \mathcal{S}] = 0$
- Momento angular orbital: $\mathbf{L} = -i\hbar\mathbf{r} \times \nabla = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$
  - Elementos de matriz: $L_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j P_k$
- Momento angular total: $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$
  - $[S_i, S_j] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk} S_k$
  - $[L_i, L_j] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk} L_k$
  - $[L_i, S_j] = 0$

- Operador J^2:

$$J^2 \equiv J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_3^2$$

- Operadores escalera: $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$
  - $[J^2, J_i] = 0$
  - $[J^2, J_\pm] = 0$
  - $[J_+, J_-] = 2\hbar J_3$
  - $[J_3, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$
  - $J_+J_- = J^2 - J_3^2 + \hbar J_3$
  - $J_-J_+ = J^2 - J_3^2 - \hbar J_3$
- Número cuántico magnético: $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$ con $2j \in \mathbb{Z}$.
- Ecuaciones de autovalores de J^2, J_3 y $J_\pm$:

$$J^2 \left|j, m\right\rangle = j(j+1)\hbar^2 \left|j, m\right\rangle,$$
$$J_3 \left|j, m\right\rangle = m\hbar \left|j, m\right\rangle,$$
$$J_\pm \left|j, m\right\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\left|j, m\pm 1\right\rangle;$$

donde $2j \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0 \quad -j \leq m \leq j$.

- Elementos de matriz de J^2, J_3 y $J_\pm$:

$$\left\langle j', m'\right| J^2 \left|j, m\right\rangle = j(j+1)\hbar^2 \delta_{j'j}\delta_{m'm}$$
$$\left\langle j', m'\right| J_3 \left|j, m\right\rangle = m\hbar\delta_{j'j}\delta_{m'm}$$
$$\left\langle j', m'\right| J_\pm \left|j, m\right\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - mm'}\delta_{j'j}\delta_{m'm\pm 1}$$

- Operadores J_1 y J_2:

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-), \quad J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$$

- Espín 1/2: sea $j = s = 1/2$ y $m = s_3$.
  - Base de estados:

$$\left|s = 1/2, s_3 = 1/2\right\rangle = \left|+\right\rangle, \quad \left|1/2, -1/2\right\rangle = \left|-\right\rangle$$

  - Operador S_3:

$$S_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_3, \quad \mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$$

  - Operadores $S_\pm$:

$$S_+ = \hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad S_- = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

  - **Espinor**: función de onda de dos componentes,

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix}\psi_+(\mathbf{r})\\ \psi_-(\mathbf{r})\end{pmatrix}$$

  las componentes se interpretan como las amplitudes de probabilidad de que la partícula esté en $\mathbf{r}$ y tenga un valor $\pm\hbar/2$ en la tercera componente del espín.

  - Normalización del espinor:

$$\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\left[|\psi_+(\mathbf{r})|^2 + |\psi_-(\mathbf{r})|^2\right] = \int \mathrm{d}^3 r\, \psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = 1$$

- Espín 1 (partículas vectoriales): sea $j = 1$
  - Base de vectores: $\{\left|1,1\right\rangle, \left|1,0\right\rangle, \left|1,-1\right\rangle\}$
  - $S_3\left|1, m\right\rangle = m\hbar\left|1, m\right\rangle \quad m = 1, 0, -1$
  - Representación matricial $S_\pm$:

$$S_+ = \sqrt{2}\hbar\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad S_- = \sqrt{2}\hbar\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

  - Representación $S_{1,2,3}$:

$$S_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix},$$

$$S_3 = \hbar\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

- Matrices de rotación o de Wigner:

$$D^{(j)}_{m'm}(R) \equiv \left\langle j, m'\right| U(R)\left|j, m\right\rangle$$

  - Elementos de matriz del operador de rotación:

$$D^{(j)}_{m'm}(\theta, \phi) = e^{-im'\phi} d^{(j)}_{m'm}(\theta)$$

  donde $d^{(j)}_{m'm}(\theta) \equiv \left\langle j, m'\right| e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_2}\left|j, m\right\rangle$ y $U(R(\theta, \phi)) = e^{-\frac{i}{\hbar}\phi J_3} e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_2}$.
  - Caso $j = 1/2$:

$$D^{(1/2)}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\phi}\cos\frac{\theta}{2} & -e^{-\frac{i}{2}\phi}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\\ e^{\frac{1}{2}\phi}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} & e^{\frac{1}{2}\phi}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

- Operadores en forma diferencial:
  - $\mathbf{L} = L_1\mathbf{e}_1 + {}_2\mathbf{e}_2 + L_3\mathbf{e}_3$
    * $L_1 = i\hbar\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$,
    * $L_2 = i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$,
    * $L_3 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$
  - Operadores escalera $L_\pm$:

$$L_\pm = \hbar e^{\pm i\phi}\left[\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

  - Operador L^2:

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

- Armónicos esféricos: $Y_l^m(\theta, \phi) \equiv \langle\mathbf{n}|l, m\rangle$
  - $L^2 Y_l^m(\theta, \phi) = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m(\theta, \phi)$
  - $L_3 Y_l^m(\theta, \phi) = m\hbar Y_l^m(\theta, \phi)$
  - $Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^l Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi)$
  - Para $m \geq 0$:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}}$$
$$\cdot e^{im\phi}(\operatorname{sen}\theta)^{-m}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}(\cos\theta)^{l-m}}(\operatorname{sen}\theta)^{2l}$$

    * En términos de los polinomios de Legendre P_l^m:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

  - Para $m < 0$:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m\left[Y_l^{-m}(\theta, \phi)\right]^*$$

- Partícula en un campo central:
  - $\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + V_{\text{eff}}(r)\right]u_l(r) = E_l u_l(r)$
  - Potencial efectivo: $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2}$
  - Degeneración $2l+1$: $l = 0$ onda s, $l = 1$ onda p, $l = 2$ onda d, $l = 3$ onda f,...
- Rotor rígido:
  - Hamiltoniano: $H = L^2/2I$
  - Espectro de niveles de energía: $E_l = \frac{l(l+1)}{2I}\hbar^2$
  - Separación entre niveles: $\Delta E_l = E_l - E_{l-1} = \hbar^2 l/I$
- Suma de momentos angulares: $\mathbf{J} = \mathbf{J_1}\otimes 1 + 1\otimes\mathbf{J_2} = \mathbf{J_1} + \mathbf{J_2}$
- Base desacoplada: $\left|j_1, m_1\right\rangle\otimes\left|j_2, m_2\right\rangle$ donde $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$, $\quad -j_2 \leq m_2 \leq j_2$.
- Base acoplada: $\left|j_1, j_2; j, m\right\rangle \equiv \left|j, m\right\rangle_c$
- Relación entre bases:

$$\left|j, m\right\rangle_c = \sum_{m = m_1 + m_2} C^{j_1 j_2}_{m_1 m_2; jm}\left|j_1, m_1\right\rangle\otimes\left|j_2, m_2\right\rangle,$$

  siendo $C^{j_1 j_2}_{m_1 m_2; jm}$ los coeficientes de Clebsch-Gordan.
- Suma de momentos angulares generales:
  - $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_{1z}J_{2z} + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+}$
  - Ley de composición de momentos angulares:

$$j_1\otimes j_2 = |j_1 - j_2|\otimes(|j_1 - j_2| + 1)\otimes\cdots\otimes(j_1 + j_2)$$

- Suma de dos espines 1/2:

$$\left|1, 1\right\rangle_c = \left|++\right\rangle, \qquad \left|1, -1\right\rangle_c = \left|--\right\rangle,$$
$$\left|1, 0\right\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+-\right\rangle + \left|-+\right\rangle\right), \qquad \left|0, 0\right\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+-\right\rangle - \left|-+\right\rangle\right)$$

- Otros:
  - $\cos\theta = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \dfrac{\theta^{2p}}{(2p)!}$
  - $\operatorname{sen}\theta = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \dfrac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!}$
  - Polinomios de Legendre:

$$P_l^m(u) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-u^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}u^{l+m}}(u^2-1)^l$$

8 Métodos aproximados

- Perturbaciones independientes del tiempo:
  - Corrección a primer y segundo (primera no trivial) orden de energía:

$$E_n^1 = \langle \psi_n^0 | V | \psi_n^0 \rangle, \quad E_n^2 = \sum_{m\neq n} \frac{|\langle \psi_n^0 | V | \psi_n^0 \rangle|}{E_n^0 - E_m^0}$$

  - Autoestados del hamiltoniano a primer orden:

$$|\psi_n^1\rangle = \sum_{m\neq n} \frac{\langle \psi_n^0 | V | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} |\psi_m^0\rangle$$

  - Partícula confinada en una caja de altura infinita y anchura a:
    * Función de onda no perturbada: $\psi_n^0 = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\operatorname{sen}\dfrac{\pi n x}{a}$
    * Niveles de energía:

$$E_n^0 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}n^2, \quad E_n^1 = \frac{eEa}{2}$$

- Caso degenerado:
  - Estado no perturbado: $|\phi_{n_i}^0\rangle = \sum_{k=1}^N c_k^{(i)} |\psi_{n_k}^0\rangle, \quad i = 1,\ldots,N$
  - Corrección a primer orden de los niveles de energía degenerados:

$$\sum_{k=1}^N V_{jk}\, c_k^{(i)} = E_{n_i}^1 c_j^{(i)},$$

  siendo $V_{jk} = \langle \psi_{n_j}^0 | V | \psi_{n_k}^0 \rangle$ el elemento de matriz de la perturbación.
- Perturbaciones dependientes del tiempo:
  - Estado $|\psi(t)\rangle$ en función de los autoestados de H_0:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t)\,|\psi_n^0\rangle,$$

  donde $a_n(t) = c_n(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^0 t}$.
  - Ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}c_m}{\mathrm{d}t} = \sum_n c_n e^{i\omega_{mn}} \langle \psi_m^0 | V(t) | \psi_n^0 \rangle,$$

  con $\omega_{mn} = (E_m^0 - E_n^0)/\hbar$.
  - $c_m(t)$ a primer orden:

$$c_m(t) = \delta_{mi} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t \mathrm{d}\bar{t}\, e^{i\omega_{mi}\bar{t}} \langle \psi_m^0 | V(\bar{t}) | \psi_i^0 \rangle$$

  - Probabilidad de transición:

$$P_{i\to n}(t) = \frac{1}{\hbar^2}\left| \int_{t_0}^t \mathrm{d}\bar{t}\, e^{i\omega_{ni}\bar{t}} \langle \psi_m^0 | V(\bar{t}) | \psi_i^0 \rangle \right|^2$$

- Perturbación periódica:
  - Perturbación $V(t)$:

$$V(t) = Te^{-i\omega t} + T^\dagger e^{i\omega t}$$

  - Amplitud de transición desde i hasta $n \neq i$:

$$\begin{aligned} c_n(t) &= -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}\bar{t}\left[\langle \psi_n^0 | T | |\psi_n^0\rangle | e^{i(\omega_{ni}-\omega)\bar{t}} \right. \\ &\qquad \left. + \langle \psi_n^0 | T | |\psi_n^0\rangle | e^{i(\omega_{ni}+\omega)\bar{t}} \right] \\ &= -\frac{i}{\hbar}\left[T_{ni} e^{\frac{i}{2}(\omega_{ni}-\omega)t} \frac{\operatorname{sen}\frac{t}{2}(\omega_{ni}-\omega)}{\frac{1}{2}(\omega_{ni}-\omega)} \right. \\ &\qquad \left. + T_{in}^* e^{\frac{i}{2}(\omega_{ni}+\omega)t} \frac{\operatorname{sen}\frac{t}{2}(\omega_{ni}+\omega)}{\frac{1}{2}(\omega_{ni}+\omega)} \right] \end{aligned}$$

  - Probabilidad de transición:

$$\begin{aligned} P_{i\to n} = \frac{4}{\hbar^2}\Bigg[&|T_{ni}|^2 \left[\frac{\operatorname{sen}\frac{t}{2}(\omega_{ni}-\omega)}{\omega_{ni}-\omega}\right]^2 \\ &+ |T_{in}|^2 \left[\frac{\operatorname{sen}\frac{t}{2}(\omega_{ni}+\omega)}{\omega_{ni}+\omega}\right]^2 \Bigg] \end{aligned}$$

  - Tasa de transición: $\Gamma_{i\to n} = \dfrac{\mathrm{d}P_{i\to n}}{\mathrm{d}t}$, $(t\to\infty)$
  - Regla de oro de Fermi: $\Gamma_{i\to n} = \dfrac{2\pi}{\hbar}|T_{ni}|^2\delta(E_n - E_i - \hbar\omega)$
  - Segunda regla de oro de Fermi: $\Gamma_i = \dfrac{2\pi}{\hbar}|T_{ni}|^2\rho(E_i + \hbar\omega)$
  - Densidad de estados en energía (partícula libre):

$$\rho(E) = \frac{Vm}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar^3}\,\mathrm{d}\Omega$$

  - Regla de frecuencias de Bohr: $\Delta E = E_n - E_i = \hbar\omega$
- Otros:
  - Función-δ de Dirac: $\lim_{t\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen} tx}{x} = \pi\delta(x)$

9 Partículas idénticas

- Estados de dos partículas:
  - Partículas bosónicas (amplitudes simétricas):

$$|a\otimes b\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|a\rangle_1 \otimes |b\rangle_2 + |a\rangle_2 \otimes |b\rangle_1\right]$$
$$\psi_{a,b}^B(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) + \psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_1)\right]$$

  - Partículas fermiónicas (amplitudes antisimétricas):

$$|a\otimes b\rangle_F = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|a\rangle_1 \otimes |b\rangle_2 - |a\rangle_2 \otimes |b\rangle_1\right]$$
$$\psi_{a,b}^F(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) - \psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_1)\right]$$

- **Principio de exclusión de Pauli**: es imposible que dos (o más) fermiones idénticos ocupen el mismo estado.
- **Teorema espín-estadística**: las partículas de espín entero son bosones, mientras que las partículas de espín semientero son fermiones.

Otros

- $\hbar = 1,054\cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s
- $g_{\text{electrón}} \approx 2$
- $g_{\text{protón}} \approx 5,59$
- Magnetón de Bohr: $\mu_B \approx 0,6\cdot 10^{-8}$ eV $\cdot$ Gauss
- $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)\mathrm{d}x = e^\gamma e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$